

# ANTI GAUSS



## Was der Taylor so alles auf die Reihe kriegt

---

### Approximation von Funktionen - Die Taylorreihe

#### 1. SINN DER SACHE

Das Approximieren (annähern) von Funktionen ist ein wichtiges Gebiet der Mathematik, da viele Geräte des täglichen Gebrauchs unentwegt darauf zurückgreifen. Computer, Taschenrechner und was sonst noch digital vor sich hin rattert, können selbst nur die 4 Grundrechenarten verarbeiten (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) und müssen bei komplizierten Rechnungen, zB. bei 3D-Anwendungen und aufwendigen Regelungen, trotzdem auf Dinge wie  $\sin(x)$ ,  $\tan(x)$ ,  $\log_b x$  zurückgreifen können.

Mit der Approximation ist es tatsächlich möglich, die aufgelisteten Funktionen durch geschicktes Verknüpfen der 4 Grundrechenarten "nachzubauen" - Taylor sei Dank.

15.06.01 AntiGauss Group



Taylor, Brook (1685 bis 1731)

## 2. BEVOR ES LOS GEHT...

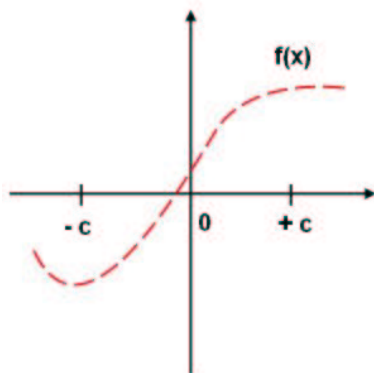
## 2.1. Anforderungen.

Die Approximation von Funktionen gehört nicht gerade zu den einfachsten Gebieten der Mathematik, deswegen hier ein paar Sachen die du brauchst, wenn du nicht nur am Layout der Blätter interessiert bist:

Thema	Woher nehmen, wenn nicht stehlen?
Mengenlehre	AntiGauss, <a href="http://www.Mathematik.net">www.Mathematik.net</a>
Folgen und Reihen	AntiGauss
Differenzieren und Ableiten	AntiGauss

## 2.2. Worum alles geht...

Wenn im weiteren Verlauf von einer Funktion  $f(x)$  geredet wird, so ist damit eine Funktion gemeint, die in einer beliebig gesetzten Umgebung von einem gesetzten Entwicklungspunkt - ich nehme der Einfachheit halber gerne die Null, also das Intervall  $]-c, +c[$ , mit  $c > 0$  - genügend oft stetig differenzierbar sei (bei Darstellung im Graphen keine Sprünge und keine Lücke haben).



Das "genügend oft differenzierbar" bezieht sich auf das Annähern selbst - es wird gezeigt dass je öfter du diese Funktion ableiten kannst, desto genauer kannst du sie annähern - aber dazu erst später.

## 3. DIE TAYLORREIHE

## 3.1. Fangen wir mal ganz linear an...

Angenommen Du hast eine Funktion  $f(x)$  mit

$$f(x) = \frac{\text{schwierig}^{\text{blub}}}{\log_{\text{bla}} \text{heftig}} \cdot (\text{hochkompliziert})^2$$

und möchtest diese Funktion mit einer Näherungsfunktion  $\tilde{p}_{\text{Linear}}$  in der Umgebung eines Entwicklungspunktes approximieren. Der Entwicklungspunkt sei zur Erinnerung also der Punkt, in dessen Nähe möglichst eine genaue Übereinstimmung zwischen  $f(x)$  und  $\tilde{p}_{\text{Linear}}$  sein soll. Zu Anfang soll  $\tilde{p}_{\text{Linear}}$  mal nur eine lineare Funktion (also eine Gerade im Graph) sein - der Einfachheit halber.

Also:

$$f(x) \approx \tilde{p}_{\text{Linear}}(x) = a_1 \cdot x + a_0$$

(\*)

Wobei  $a_1$  die Steigung der Geraden und  $a_0$  die Verschiebung der Geraden auf der y-Achse für  $x = 0$  ist.

Naja, eine lineare Funktion die eine beliebige Funktion  $f$  in einem Punkt  $(x, f(x))$  und dessen Umgebung relativ gut beschreibt...hört sich doch sehr nach der Tangente von  $f$  in  $(x, f(x))$  an! Wir wollen  $x = 0$  setzen, da das genau in der Praxis für die meisten zu approximierenden Funktionen *der* Trick ist. Also:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \tilde{p}_{Linear}(x) \Leftrightarrow \\ f(0) &= \tilde{p}_{Linear}(0) = a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0 \text{ und} \\ f'(0) &= \tilde{p}'_{Linear}(0) = a_1 \end{aligned}$$

Und jetzt gucken wir mal mit die Augen:  $f(0) = a_0$  und  $f'(0) = a_1$  und jetzt mal kurz auf die Geradengleichung (\*) schielen...und? Es folgt:

$$\tilde{p}_{Linear}(x) = f'(0) \cdot x + f(0) \approx f(x)$$

Was haben wir jetzt gewonnen:  $f(0)$  und  $f'(0)$  können wir einmalig berechnen und als Konstanten in unserem System, das  $f(x)$  nicht berechnen kann (Computer/Taschenrechner), abspeichern. Die einzige Unbekannte  $x$ , die Eingabe des Nutzers, wird nur multipliziert - das müsste der Rechner gerade noch können (ich werde an dieser Stelle keine Witze über Minderheitensysteme wie Apple, Amiga, OS/2-Rechner usw machen).

### 3.2. ...und steigern uns dann zum Polynom.

Die Approximation von  $f$  durch eine lineare Funktion ist zwar total tuffig und super - aber auch genauso ungenau. Zwar stimmen die Werte in diesem einen Tangentenpunkt (im Beispiel  $x = 0$ , ja es geht auch allgemeiner...) überein, aber alle anderen Punkte der Umgebung (gerade wenn  $|c|$  nicht klein) sind mit  $\tilde{p}_{Linear}$  genauso gut zu errechnen wie mit einem Bagger Plätzchen zu backen sind.

Die Grundidee bei der Linearen Gleichung ist ja nicht schlecht aber halt nicht ausreichend:

- (1) Wir haben gesagt dass die Werte von  $f$  und  $\tilde{p}$  in einem Punkt übereinstimmen (war im vorigen Beispiel der Tangentenschnittpunkt)
- (2) und die erste Ableitung von  $f$  und  $\tilde{p}$  ebenso. Also:  $f'(x) = \tilde{p}'(x)$ .

Naja, warum sollten denn nicht die zweite, dritte, vierte usw Ableitung von  $f$  und  $\tilde{p}$  an der Stelle  $x$  übereinstimmen. Also:

$$\begin{aligned} f(0) &= \tilde{p}(0) \\ f'(0) &= \tilde{p}'(0) \end{aligned}$$

⋮

$$f^{(n)}(0) = \tilde{p}^{(n)}(0)$$

Nehmen wir mal als Näherungsfunktion eine ganzrationale Funktion zweiten Grades  $\tilde{p}_2$  (keine Angst - es kommt kein " $\tilde{p}_{Polynom_2.Grad}$ ").

Also:

$$\tilde{p}_2(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_2(x) &= 2 \cdot a_2 \cdot x + a_1 \\ \tilde{p}''_2(x) &= 2 \cdot a_2 \end{aligned}$$

Einsetzen von  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} f(0) &= \tilde{p}_2(0) = a_0, \text{ also } a_0 = f(0) \\ f'(0) &= \tilde{p}'_2(0) = a_1, \text{ also } a_1 = f'(0) \\ f''(0) &= \tilde{p}''_2(0) = 2 \cdot a_2, \text{ also } a_2 = \frac{f''(0)}{2} \end{aligned}$$

Also gilt  $\tilde{p}_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2$ . Für eine Polynom dritten Grades würde es also lauten:

$$\tilde{p}_3(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$



It's magic!

Idee!!

Dann folgt:

$$p_3'(x) = 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x + a_1$$

$$p_3''(x) = 6 \cdot a_3 \cdot x + 4 \cdot a_2$$

$$p_3'''(x) = 6 \cdot a_3$$

Einsetzen von  $x = 0$ :

$$f(0) = \tilde{p}_3(0) = a_0, \text{ also } a_0 = f(0)$$

$$f'(0) = \tilde{p}_3'(0) = a_1, \text{ also } a_1 = f'(0)$$

$$f''(0) = \tilde{p}_3''(0) = 2 \cdot a_2, \text{ also } a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

$$f'''(0) = \tilde{p}_3'''(0) = 6 \cdot a_3, \text{ also } a_3 = \frac{f'''(0)}{6}$$

Für  $\tilde{p}_3$  gilt offenbar:  $\tilde{p}_3(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3$ .

Nun könnte man das für eine beliebige Näherungsfunktion  $\tilde{p}_4$  4-ten Grades,  $\tilde{p}_5$  5-ten Grades usw fortführen aber man sagt auch Mathematiker sollen ein Privatleben haben (zumindestens pflanzen sie sich erfolgreich fort...) und deshalb wird es Zeit für einen...

**Satz:**

Für Approximation an der Stelle 0 (im Beispiel) gilt:

$$\tilde{p}_n(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

Für Approximation an einer beliebigen Stelle  $x_0$  gilt:

$$\tilde{p}_n(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$



Approxima-  
tionssatz

Und wenn wir schon dabei sind, gleich noch eine...

**Definition:**

Da  $f(x) \approx \tilde{p}(x)$  folgt:

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

Oder wer es mathematisch cool braucht...

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot (x - x_0)^i + R_{n+1}(x)$$

Diese Polynom ohne  $R_{n+1}(x)$  wird als das n-te Taylorpolynom von  $f$  im Punkt  $x_0$  bezeichnet. Für unendliche Reihen, also  $n \rightarrow \infty$ , spricht man von der Taylorreihe von  $f$ . (Im Spezialfall  $x_0 = 0$  ist das die *McLaurinreihe*)



Taylorreihe  
McLaurinreihe

$R_n(x)$  wird als das Restglied der Approximation bezeichnet, was nichts mit ungenutzter Manneskraft zu tun hat, sondern den Fehler in der Approximation zwischen  $\tilde{p}(x)$  und  $f(x)$  angibt. Wie du siehst hat das Restglied eine wichtige Rolle: es ist *nicht* immer ausreichend zu wissen was das ungefähre Ergebnis (durch Approximation) ist, sondern manchmal ist auch interessant, um wie viel du daneben liegst. Also mal Werbung in eigener Sache: Das Skript Taylor 2 widmet sich der Abschätzung des Restgliedes.

**Denn merke...**

mathem. Lyrik

Ist das Restglied nicht sehr klein  
Wird die Näherung Scheisse sein.

## 4. HAB' ICH DA JEMAND "Wozu" FRAGEN GEHÖRT?

Bisher haben wir versucht an eine komplizierte Funktion eine andere (einfachere) Funktion anzunähern, um mit dieser rechnen zu können. Jetzt wird es Zeit die Vorteile daraus zu ziehen. Ich möchte einmal an einem Beispiel zeigen, was der Taylor für Vorteile hat:

Behauptung:  $(e^x)' = e^x$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 (e^x)' &=_{(Taylor)} (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots)' \mid \text{gliedweises Ableiten} \\
 &= 0 + 1 + 2 \cdot \frac{x}{2!} + 3 \cdot \frac{x^2}{3!} + 4 \cdot \frac{x^3}{4!} + 5 \cdot \frac{x^4}{5!} + 6 \cdot \frac{x^5}{6!} + \dots \mid \text{Termumformung} \\
 &= 0 + 1 + 2 \cdot \frac{x}{2 \cdot 1!} + 3 \cdot \frac{x^2}{3 \cdot 2!} + 4 \cdot \frac{x^3}{4 \cdot 3!} + 5 \cdot \frac{x^4}{5 \cdot 4!} + 6 \cdot \frac{x^5}{6 \cdot 5!} + \dots \mid \text{Kürzen} \\
 &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \\
 &= e^x
 \end{aligned}$$

□

## 5. NOCH'MAL AN EINEM BEISPIEL ZEIGEN WIE DU ZUM TAYLOR KOMMST?

Also wem das  $\tilde{p}_{Linear}$  zu abstrakt ist, dem sei an dieser Stelle noch ein Beispiel gegönnt. Nun sei unsere Funktion die wir annähern wollen einmal  $\sin(x)$  (weil wir z.B. eine Zeitmaschine bauen und die braucht gerade den Sinus und kann selbst nur multiplizieren...ok ein blödes Beispiel aber hey ich hab' wenigstens Fantasie!). Unser Entwicklungspunkt sei wieder einmal die Null (es wird also eine McLaurinreihe) und möchten nur bis zum 4. Glied approximieren (beim Zeitreisen braucht man den Sinus nicht so exakt... :-]). Also benötigen wir die ersten vier Ableitungen von  $\sin(x)$  an der Stelle 0:

Ableitung	Funktion und Ableitung	Wert
0.	$\sin(0) = 0$	0
1.	$\sin(0)' = \cos(0) = 1$	1
2.	$\sin(0)'' = -\sin(0) = 0$	0
3.	$\sin(0)''' = -\cos(0) = -1$	-1
4.	$\sin(0)^{(4)} = \sin(0) = 0$	0

Die Taylorreihe ist nun wie folgt definiert:

$$\tilde{p}_n(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

Nach Einsetzen der errechneten Werte erhalten wir:

$$\tilde{p}_4(x) = \frac{0}{0!} + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{0}{2!} \cdot x^2 + \frac{-1}{3!} \cdot x^3 + \frac{0}{4!} \cdot x^4$$

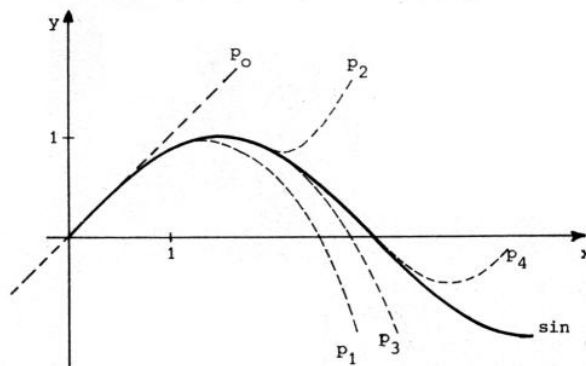
Jetzt können wir noch ein wenig Umformen...

$$\tilde{p}_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

...und wissen jetzt dass:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + R_4(x)$$

Eigentlich gar nicht so schwer, wenn man das System verstanden hat. Ich hoffe es wurde Dir auch klar dass der Entwicklungspunkt eine wichtige Rolle spielt - nur die Wahl dieses Punktes entscheidet, ob die Approximation nun deine Funktion vereinfacht oder halt nicht. Wenn du in die Tabelle auf der letzten Seite (im Quickie) schaust, wirst du einige "Standard"-Funktionen finden und kannst einmal kontrollieren ob ich noch richtig ableiten kann.



In der Grafik sieht man auch sehr deutlich wie genau deine Näherung wird, wenn du nur genügend oft differenzierst.

$\sin(x)$  und approximierende Polynome bis zum 4. Grad

## 6. ABSONDERHEITEN BESTIMMTER FUNKTIONEN

Wenn du dieses Skript durcharbeitest, könntest du auf die Idee kommen, dass so ziemlich jede Funktion eine Taylorpolynom besitzt und - wenn du nur soviel wie möglich Glieder bildest - diese irgendwann die Ursprungsfunktion widerspiegelt (Oder auf mathematisch: Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ , dann konvergiert die Taylorreihe gegen  $f(x)$ ). Bevor ich euch aber vor den Kopf stosse, schnell noch eine

### Definition:

Sei  $x_0$  der Entwicklungspunkt der Taylorreihe die von  $f(x)$  gebildet wurde. Dann heisst  $\rho$  der Konvergenzradius von  $f(x)$ , wenn für  $\rho$  gilt:

$$\rho = \max\{r \mid r = |x - x_0|\}$$

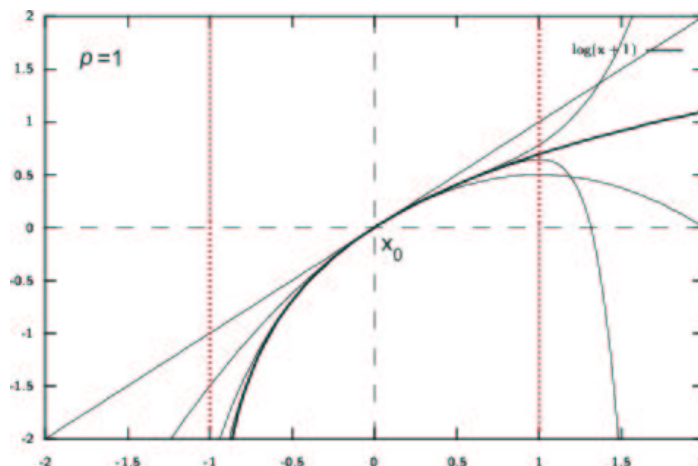
Gilt  $\rho = \infty$ , so spricht man von einer *globalen* Approximation.

Gilt  $\rho < \infty$  und  $\rho > 0$ , so heisst diese Approximation *lokal*.



Konvergenzradius ( $\rho$ )

Anders ausgedrückt ist also  $\rho$  die grösste Distanz zwischen dem Entwicklungspunkt und einem bel.  $x_{max}$ , bei dem sich noch die Approximation der Urfunktion annähert. Bei allen  $x > x_{max}$  verhält sich die Näherungsfunktion recht pervers gegenüber ihrer Urfunktion (geht ganz plötzlich in eine andere Richtung). Bei  $\ln(x+1)$  ist der Konvergenzradius  $\rho = 1$ :



Wie du siehst gehen die approximierenden Funktionen bei allen  $x > 1$  b.z.w. bei allen  $x < -1$  recht verquer (Kann man auch leicht nachvollziehen:  $\ln(x+1)$  ist bei  $-1$  nicht definiert, die Taylorpolynome hingegen schon...)

Deshalb gleich eine Warnung: Es gibt durchaus Funktionen, die nicht approximiert werden können, also bei denen  $\rho = 0$  ist.

## 7. RECHNEN MIT TAYLOR

Bisher hast du gesehen, dass es möglich ist mit Taylor Funktionen zu vereinfachen sowie einen Beweis zu führen (siehe 4. :  $(e^x)' = e^x$ ) und haben dabei das Einfachste fast übergangen: Natürlich kannst du Taylorreihen...

- gliedweise addieren.
- gliedweise differenzieren (siehe 4.).
- gliedweise integrieren.
- multiplizieren.
- dividieren.
- substituieren.

### 7.1. Beispiel Multiplikation.

$$\begin{aligned} x^2 \cdot e^x &= x^2 \cdot \overbrace{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)}{=e^x} \quad |x^2 \text{ in Klammer ziehen} \\ &= x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \frac{x^6}{4!} + \dots \end{aligned}$$

### 7.2. Beispiel Substituieren.

Gesucht sei die Taylorreihe von  $e^{(x-5)}$ . Wir wissen (siehe letzte Seite) dass die Taylorreihe von  $e^x$  so lautet:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Nun kannst du einfach  $(x-5)$  für  $x$  in  $e^x$  substituieren (einsetzen):

$$\begin{aligned} e^{(x-5)} &= 1 + (x-5) + \frac{(x-5)^2}{2!} + \frac{(x-5)^3}{3!} + \frac{(x-5)^4}{4!} + \dots + \frac{(x-5)^n}{n!} \quad | \text{ kleine Termumformung :-} \\ &= -4 + x + \frac{(x-5)^2}{2!} + \frac{(x-5)^3}{3!} + \frac{(x-5)^4}{4!} + \dots + \frac{(x-5)^n}{n!} \end{aligned}$$

## 8. SCHON GEWUSST...DIE TAYLORBIOGRAPHIE

Dieser Teil des Skriptes soll einmal das Leben und Schaffen des Mannes beleuchten, dessen Arbeit hier erläutert wurde: Brook Taylor. Wenn du diesen Teil als lästig empfindest, so hält dich ja keiner davon ab weiterzublättern - glaub' mir: Vieles prägt sich leichter ein wenn man den Hintergrund kennt...



Brook Taylor wurde am 18. August 1685 in Edmington geboren und verstarb am 29. Dezember 1731. Seine mathematischen Tätigkeiten erstreckten sich über das Gebiet der Linearperspektive sowie den unendlichen Reihen, wobei sicherlich die Taylorreihe als seine grösste Vermachenschaft zu nennen ist. Taylor gehörte seit der Geburt zur englischen Oberschicht, da seine Familie über ein ansehnliches Vermögen verfügte. Sein Vater, John Taylor, war sehr künstlerisch begabt und vererbte seinem Sohn das Interesse für die Musik und die Malerei. Unglücklicherweise war das auch alles was sein Vater für gute Eigenschaften hatte - er war das, was man höflich mit streng und diszipliniert bezeichnen würde. Seine Mutter, Olivia Tempest, war Tochter von Sir John Tempest und vermachte ihren Sohn die adlige Herkunft. Taylor hat bis zu seiner Immatrikulation am 3. April 1703 im St. John's College Cambridge nur



Privatunterricht genossen und seine mathematische Begabung dort sehr gefördert bekommen. Im Jahr 1709 machte er in Cambridge seinen Abschluss (LL.B.), wobei bereits ein Jahr früher eines seiner wichtigeren Werke entstand. Er veröffentlichte zahlreiche Artikel und Bücher - darunter sein "Hauptwerk" *New Principles of Linear Perspective* (1719, Titel links). Im Privaten hatte Taylor nicht viel Glück: Im Jahr 1721 heiratete er seine Frau Miss Brydges, die zwar aus einer guten Familie kam, aber völlig mittellos war. Daraufhin verweigerte sein Vater die Zustimmung zur Hochzeit und es kam zum Bruch zwischen Vater und Sohn. Im Jahr 1723 starb seine Frau bei der Geburt ihres ersten Kindes - das Kind ebenso. Nach dieser Familientragödie kam es zur Versöhnung mit dem Vater. Seine zweite Frau, Sabetta Sawbridge, heiratete er zwei Jahre später. Am 4. April 1729 starb sein Vater und, ein Jahr später, seine zweite

Frau - wieder bei der Geburt ihres Kindes. Ihre Tochter, Elizabeth, überstand die Geburt ohne Schädigungen. Taylor beschäftigte sich in dieser Zeit mit Mathematik und Physik. Er widmete sich stark Kepler's zweitem Gesetz der Planetenbewegung, der Epsilonantik und hielt viel Kontakt mit Mathematikern seiner Zeit.



Bernoulli schrieb in einem privaten Brief, er solle sich in seinen Schriften doch etwas zurückhalten und für seinen Stand entsprechend ausdrücken. Taylor antwortete er *will* sich scharf und klar ausdrücken, damit jeder weiss, dass er seine Arbeit versteht. Leider sorgte diese prägnante Ausdrucksweise dafür, dass nur wenige Mathematiker ihm den Respekt entgegenbrachten, die seine Arbeit verdiente - und diese ging weit über die Entwicklung der Taylorreihe hinaus.

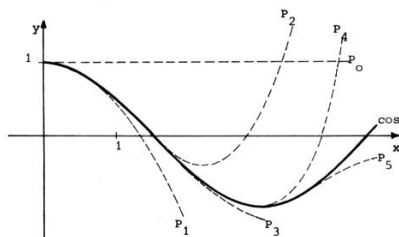


# Quickie

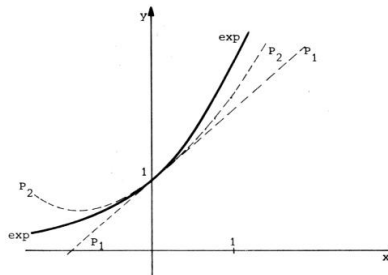
## Einige nützliche Funktionen

$f(x)$	MacLaurinreihe ( $x_0 = 0$ )	Konvergenzradius $\rho$
$e^x$	$\tilde{p}_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} \dots$	$\infty$
$\ln(x+1)$	$\tilde{p}_n = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} \dots$	1
$\sin(x)$	$\tilde{p}_n = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} \dots$	$\infty$
$\cos(x)$	$\tilde{p}_n = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} \dots$	$\infty$
$\frac{1}{1-x}$	$\tilde{p}_n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \dots$	1

$\cos(x)$  und approx. Polynome.



$e^x$  und approx. Polynome.



## Definition der Taylorreihe

Entwicklungspunkt ist 0 (McLaurin-Reihe):

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + R_n(x)$$

Entwicklungspunkt ist  $x_0$ :

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n + R_n(x)$$



Taylorreihe  
McLaurinreihe

## Definition vom Konvergenzradius:

Sei  $x_0$  der Entwicklungspunkt der Taylorreihe, so ist  $\rho$  der Konvergenzradius, wenn gilt:

$$\rho = \max\{r \mid r = |x - x_0|\}$$

Gilt  $\rho = \infty$ , so spricht man von einer *globalen* Approximation.

Gilt  $\rho < \infty$  und  $\rho > 0$ , so heisst diese Approximation *lokal*.



Konvergenz-  
radius ( $\rho$ )